ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

LÊ THỊ TRANG

ĐỊNH LÍ ĐIỂM BẤT ĐỘNG TRONG KHÔNG GIAN $G-$METRIC ĐẦY ĐỦ

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN - 2019

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

LÊ THỊ TRANG

ĐỊNH LÍ ĐIỂM BẤT ĐỘNG TRONG KHÔNG GIAN $G-$METRIC ĐẦY ĐỦ

Ngành: TOÁN GIẢI TÍCH

Mã số: 8.46.01.02

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học: PGS.TS Phạm Hiến Bằng

THÁI NGUYÊN - 2019

LỜI CAM ĐOAN

Tôi xin cam đoan đây là công trình nghiên cứu của riêng tôi dưới sự hướng dẫn của PGS.TS Phạm Hiến Bằng. Các tài liệu trong luận văn là trung thực. Các kết quả chính của luận văn chưa từng được công bố trong các luận văn Thạc sĩ của các tác giả khác.

Tôi xin cam đoan rằng mọi sự giúp đỡ cho việc thực hiện Luận văn này đã được cảm ơn và các thông tin trích dẫn trong Luận văn đã được chỉ rõ nguồn gốc.

Thái Nguyên, tháng 4 năm 2019

Tác giả

Lê Thị Trang

LỜI CẢM ƠN

Bản luận văn được hoàn thành tại Trường Đại học Sư phạm - Đại học Thái Nguyên dưới sự hướng dẫn của PGS.TS Phạm Hiến Bằng.

Xin chân thành cảm ơn Phòng Đào tạo- Bộ phận Sau Đại học, Ban chủ nhiệm Khoa Toán, các thầy cô giáo Trường Đại học Sư phạm - Đại học Thái Nguyên, Viện Toán học và Trường Đại học Sư phạm Hà Nội đã giảng dạy và tạo điều kiện thuận lợi cho tôi trong quá trình học tập và nghiên cứu khoa học.

Bản luận văn chắc chắn sẽ không tránh khỏi những khiếm khuyết vì vậy rất mong nhận được sự đóng góp ý kiến của các thầy cô giáo và các bạn học viên để luận văn này được hoàn chỉnh hơn.

Cuối cùng xin cảm ơn gia đình và bạn bè đã động viên, khích lệ tôi trong thời gian học tập, nghiên cứu và hoàn thành luận văn.

Thái Nguyên, tháng 4 năm 2019

Tác giả

Lê Thị Trang

MỤC LỤC

Lời cam đoan i
Lời cảmơn ii
Mục lục iii
MỞ ĐẦU 1
1. Lí do chọn đề tài 1
2. Mục đích và nhiệm vụ nghiên cứu 1
3. Phương pháp nghiên cứu 1
4. Bố cục của luận văn 2
CHƯƠNG 1: KIẾN THỨC CƠ SỞ VỀ KHÔNG GIAN G – METRIC 3
1.1. Không gian G – Metric 3
1.2. Một số tính chất cơ bản 4
1.3. Tôpô của không gian G – Metric 7
1.4. Sự hội tụ trong không gian G – metric 9
CHƯƠNG 2: ĐỊNH LÍ ĐIỂM BẤT ĐỘNG TRONG KHÔNG GIAN G – METRIC ĐẦY ĐỦ 13
2.1. Nguyên lí ánh xạ co Banach trong không gian G – metric 13
2.2. Định lý điểm bất động trong không gian G – metric đầy đủ 14
KẾT LUẬN 32
TÀI LIỆU THAM KHẢO 33

MỞ ĐẦU

1. Lí do chọn đề tài

Như đã biết, nguyên lí điểm bất động đã được Banach phát biểu và chứng minh từ năm 1922 là một trong những định lý quan trọng nhất của giải tích hàm cổ điển. Nghiên cứu về lý thuyết điểm bất động đóng một vai trò rất quan trọng bởi vì nó tìm được ứng dụng trong nhiều lĩnh vực quan trọng như phương trình vi phân, vận trù học, toán kinh tế.... Trong các nghiên cứu về sau, các tổng quát khác nhau về không gian metric đã được đưa ra bởi một số nhà toán học như Gahler [3] (không gian 2 – metric) và Dhage [2] (không gian D – metric). Năm 2004, Mustafa và Sims [6] đã chỉ ra rằng hầu hết các kết quả liên quan đến các tính chất tôpô của $D-$metric là không chính xác. Để sửa chữa những hạn chế này, họ đã đưa ra một khái niệm mới, thích hợp hơn, được gọi là $G-$metric. Đồng thời, Mustafa và các cộng sự ([7-8]) đã nghiên cứu một số định lí điểm bất động đối với các ánh xạ thỏa mãn các điều kiện co khác nhau trên không gian $G-$metric. Việc tổng quát hóa một số kết quả của Mustafa, đã được thực hiện bởi S.K. Mohanta [4]. Trong đó tác giả đã chứng minh một số định lí điểm bất động trong không gian $G-$metric đầy đủ.

Theo hướng nghiên cứu này, chúng tôi chọn đề tài: "*Định lý điểm bất động trong không gian $G-$ metric đầy đủ*".

Ý nghĩa thời sự: Đề tài có ý nghĩa thời sự, đã và đang được nhiều nhà toán học trong và ngoài nước quan tâm nghiên cứu.

2. Mục đích và nhiệm vụ nghiên cứu

Nghiên cứu và trình bày một số kết quả về điểm bất động trên các không gian $G-$metric đầy đủ.

3. Phương pháp nghiên cứu

Sử dụng các phương pháp của giải tích hàm.

4. Bố cục của luận văn

Nội dung luận văn được viết chủ yếu dựa trên các tài liệu [1], [4] và [9], gồm 40trang, trong đó có phần mở đầu, hai chương nội dung, phần kết luận và danh mục tài liệu tham khảo.

Chương 1: Trình bày tổng quan và hệ thống một vài tính chấtcủa $G-$ metric,tôpô của không gian $G-$metric, sự hội tụ trong không gian $G-$metric và ánh xạ liên tục trong không gian $G-$metric.

Chương 2: Là nội dung chính của luận văn, trình bày lại chi tiết các kết quả nghiên cứu của S.K. Mohantavề điểm bất động trong không gian $G-$ metric đầy đủ.

Cuối cùng là phần kết luận trình bày tóm tắt kết quả đạt được.

CHƯƠNG 1
KIẾN THỨC CƠ SỞ VỀ KHÔNG GIAN $G-$METRIC

Trong chương này chúng tôi trình bày khái niệm về $G-$metric trên một tập E và một số tính chất cơ bản của nó.

1.1. Không gian $G-$Metric

Năm 2004, Mustafa và Sims [6] đưa ra một khái niệm mới là không gian $G-$metric, đồng thời chomột số ví dụ về không gian $G-$metric và một số tính chất của nó. Tác giả đã chỉ ra rằng các không gian $G-$metric được trang bị tôpô Hausdorff, cho phép chúng ta xem xét một số khái niệm tôpô như dãy hội tụ, dãy Cauchy, ánh xạ liên tục, tính đầy đủ...

Định nghĩa 1.1.1. Một *không gian $G-$metric* là cặp (E,G), trong đó E là một tập khác rỗng và $G: E^3 \to \mathbb{R}^+$ là một hàm sao cho với mọi $r,s,t,a \in E$, các điều kiện sau đây được thỏa mãn:

(G_1) $G(r,s,t)=0$ nếu $r=s=t$;

(G_2) $G(r,r,s)>0$ với $r \neq s$;

(G_3) $G(r,r,s) \leq G(r,s,t)$ với $t \neq s$;

(G_4) $G(r,s,t)=G(r,t,s)=G(s,t,r)=\ldots$ (*đối xứng với cả 3 biến*);

(G_5) $G(r,s,t) \leq G(r,a,a)+G(a,s,t)$ (*bất đẳng thức hình chữ nhật*).

Hàm G như trên được gọi là một *$G-$metric trên E*.

Các tính chất trên có thể được giải thích dễ dàng theo nghĩa của không gian metric. Cho (E,d) là một không gian metric và $G: E^3 \to \mathbb{R}^+$ là hàm số được xác định bởi

$$G(r,s,t)=d(r,s)+d(r,t)+d(s,t) \text{ với mọi } r,s,t \in E.$$

Khi đó (E,G) là một không gian $G-$metric. Trong trường hợp này, $G(r,s,t)$ có thể được hiểu là chu vi của tam giác với các đỉnh r,s và t. Ví dụ, (G_1) có

nghĩa là với một điểm ta không thể có chu vi dương, và (G_2) tương đương với khoảng cách giữa hai điểm khác nhau không thể bằng 0. Hơn nữa, vì chu vi của một tam giác không phụ thuộc vào thứ tự các đỉnh của nó, nên ta có (G_4).Cuối cùng,(G_5) là mở rộng của bất đẳng thức tam giác sử dụng một đỉnh thứ tư.

Ví dụ 1.1.2. Mỗi tập E khác rỗng có thể được trang bị một $G-$metric rời rạc, được xác định với mọi $r,s,t \in E$, bởi

$$G(r,s,t)=\begin{cases}0, & \textit{nếu} \quad r=s=t \\ 1, & \textit{trong các trường hợp khác}\end{cases}$$

Ví dụ 1.1.3. Nếu G là $G-$metric trên E thì $G' : E^3 \to [0,\infty)$ xác định bởi

$$G'(r,s,t)=\frac{G(r,s,t)}{1+G(r,s,t)} \quad \text{với mọi } r,s,t \in E$$

cũng là một $G-$metric trên E.

1.2.Một số tính chất cơ bản

Một trong những tính chất hữu ích nhất của $G-$metric là bổ đề sau.

Bổ đề 1.2.1.*Nếu (E,G) là không gian $G-$metric thì*

$$G(r,s,s) \le 2G(s,r,r) \quad \textit{với mọi } r,s \in E.$$

Hệ quả 1.2.2.*Cho $\{r_n\}$ và $\{s_n\}$ là hai dãy trong không gian $G-$metric (E,G).Khi đó*

$$\lim_{n\to\infty} G(r_n,r_n,s_n)=0 \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} G(r_n,s_n,s_n)=0.$$

Bổ đề 1.2.3.*Cho (E,G) là không gian $G-$metric. Khi đó, với bất kì $r,s,t,a \in E$, ta có các tính chất sau đây*

1) $G(r,s,t) \le G(r,r,s)+G(r,r,t)$.

2) $G(r,s,t) \le G(r,a,a)+G(s,a,a)+G(t,a,a)$.

3) $\left|G(r,s,t)-G(r,s,a)\right| \le \max\{G(a,t,t),G(t,a,a)\}$.

4) *Nếu $n \ge 2$ và $r_1,r_2,...,r_n \in E$ thì*

$$G(r_1, r_n, r_n) \le \sum_{i=1}^{n-1} G(r_i, r_{i+1}, r_{i+1}) \text{ và} \tag{1.1}$$

$$G(r_1, r_1, r_n) \le \sum_{i=1}^{n-1} G(r_i, r_i, r_{i+1}).$$

5) *Nếu* $G(r,s,t) = 0$ *thì* $r = s = t$.

6) $G(r,s,t) \le G(r,a,t) + G(a,s,t)$.

7) $G(r,s,t) \le \dfrac{2}{3}[G(r,s,a) + G(r,a,t) + G(a,s,t)]$.

8)*Nếu* $r \in E \setminus \{t,a\}$ *thì* $\left|G(r,s,t) - G(s,t,a)\right| \le G(a,r,t)$.

9) $G(r,s,s) \le 2G(r,s,t)$.

*Chứng minh.*1) Áp dụng (G_4) và (G_5) với $a = r$, ta có

$$\begin{aligned} G(r,s,t) = G(s,r,t) &\le G(s,r,r) + G(r,r,t) \\ &= G(r,r,s) + G(r,r,t). \qquad \square \end{aligned}$$

2) Bằng cách áp dụng (G_5) hai lần và sử dụng (G_4), ta có

$$\begin{aligned} G(r,s,t) &\le G(r,a,a) + G(a,s,t) = G(r,a,a) + G(s,a,t) \\ &\le G(r,a,a) + G(s,a,a) + G(a,a,t). \qquad \square \end{aligned}$$

3) Theo (G_4) và (G_5), ta có

$$G(r,s,t) = G(t,s,r) \le G(t,a,a) + G(a,s,t),$$

$$G(a,s,r) \le G(a,t,t) + G(t,s,r).$$

Vì thế,

$$G(r,s,t) - G(a,s,r) \le G(t,a,a) \text{ và}$$

$$G(a,s,r) - G(r,s,t) \le G(a,t,t).$$

Do đó,

$$\left|G(r,s,t) - G(r,s,a)\right| \le \max\{G(a,t,t), G(t,a,a)\}. \square$$

4) Nếu $n = 2$, điều đó là hiển nhiên, và nếu $n = 3$ thì (1.1) là tính chất (G_5) khi cho $r = r_1$, $a = r_2$ và $s = t = r_3$. Bằng cách quy nạp, nếu (1.1) xảy ra với